

El Límite Semiclásico

Alejandro Uribe Ahumada

Pachuca, 15 de Octubre 2003

Universidad de Michigan, Ann Arbor

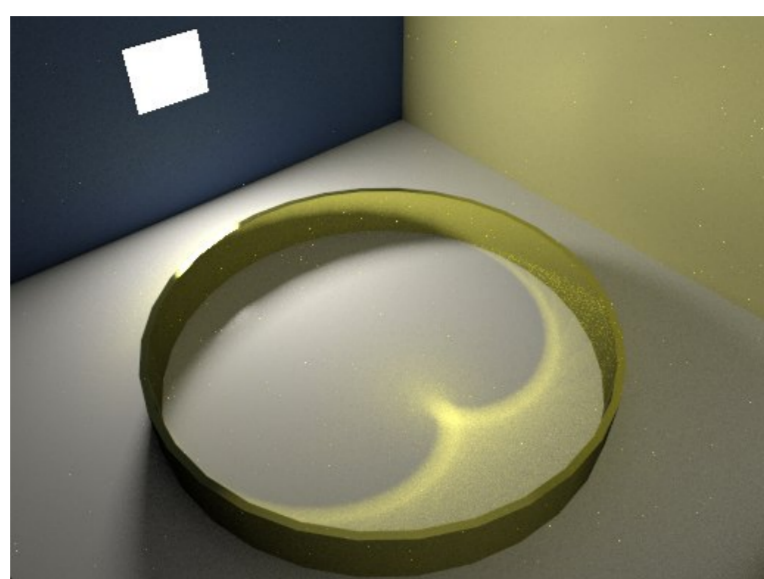
Introducción

- ▶ El límite semiclásico y su inverso, la teoría de "cuantización", relacionan modelos geométricos y analíticos de ciertos fenómenos físicos.
- ▶ Matemáticamente, el límite semiclásico se traduce en relaciones asintóticas de cantidades analíticas en términos de cantidades geométricas.

Contenido de la plática:

1. Primer ejemplo (óptica): Formación de cáusticas.
2. La herramienta principal: fase estacionaria.
3. La mecánica clásica y la cuántica.
4. Algunos teoremas:
 - ▶ Sobre autovalores de un operador elíptico.
 - ▶ Caos cuántico.
5. Algunos problemas abiertos.

1. La Cáustica de una Taza de Café



Modelo geométrico

- ▶ La luz consiste de rayos que viajan en línea recta en un medio homogéneo.
- ▶ Se reflejan según la ley: ángulo de incidencia = ángulo de reflexión.
- ▶ La cáustica es la envolvente de los rayos reflejados.
- ▶ Este modelo se aplica a otras cáusticas: el tubo de neón.

Ecuación de una cáustica

Tenemos una familia monoparamétrica de rectas,
o una familia a dos parámetros de puntos:

$$\vec{x}(s, t) = \vec{r}(s) + t\vec{v}(s).$$

Condición para que un punto esté en la cáustica:

$$\vec{x}(s, t) = \vec{x}(s + \Delta s, t + \Delta t).$$

Dividiendo por Δs y tomando el límite $\Delta s \rightarrow 0$:

$$0 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}.$$

Descripción usando el Espacio Fase

- ▶ El espacio fase es $X = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ (posición y velocidad en el plano).
- ▶ En X tenemos el flujo “avanzar en línea recta con velocidad uno”:

$$\phi_t(\vec{x}, \vec{v}) = \left(\vec{x} + \frac{t}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \vec{v}\right).$$

- ▶ Los puntos de la “taza” junto con las direcciones de los rayos reflejados forman una variedad de dimensión dos, $\Lambda \subset X$.
- ▶ La cáustica se forma al proyectar $\phi_t(\Lambda)$ sobre el plano.

Modelo Analítico

- ▶ La luz consiste de *ondas* que están descritas por una función $\psi(t, \vec{x})$.
- ▶ La función ψ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \Delta \psi, \quad \Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

- ▶ Una fuente puntual en \vec{y} de frecuencia k produce una onda de la forma:

$$w(t, \vec{x}) = a \frac{\cos(k(|\vec{x} - \vec{y}| - t - t_0))}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

-fuentes puntuales-

Usando la relación de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, podemos escribir una fuente puntual general:

$$w(t, \vec{x}) = \alpha \frac{e^{ik(|\vec{x}-\vec{y}|-t)}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = e^{-ikt} \alpha \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}.$$

Estudiaremos únicamente la parte espacial,

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|}.$$

Interferencia:

- ▶ Cuando dos ondas "chocan" (interfieren) se suman algebraicamente.
- ▶ La magnitud de la suma depende de la fase de las ondas componentes: Interferencia constructiva/destructiva.
- ▶ La cáustica se forma por un fenómeno de interferencia constructiva/destructiva de las ondas reflejadas.

Ejemplo en dos dimensiones:

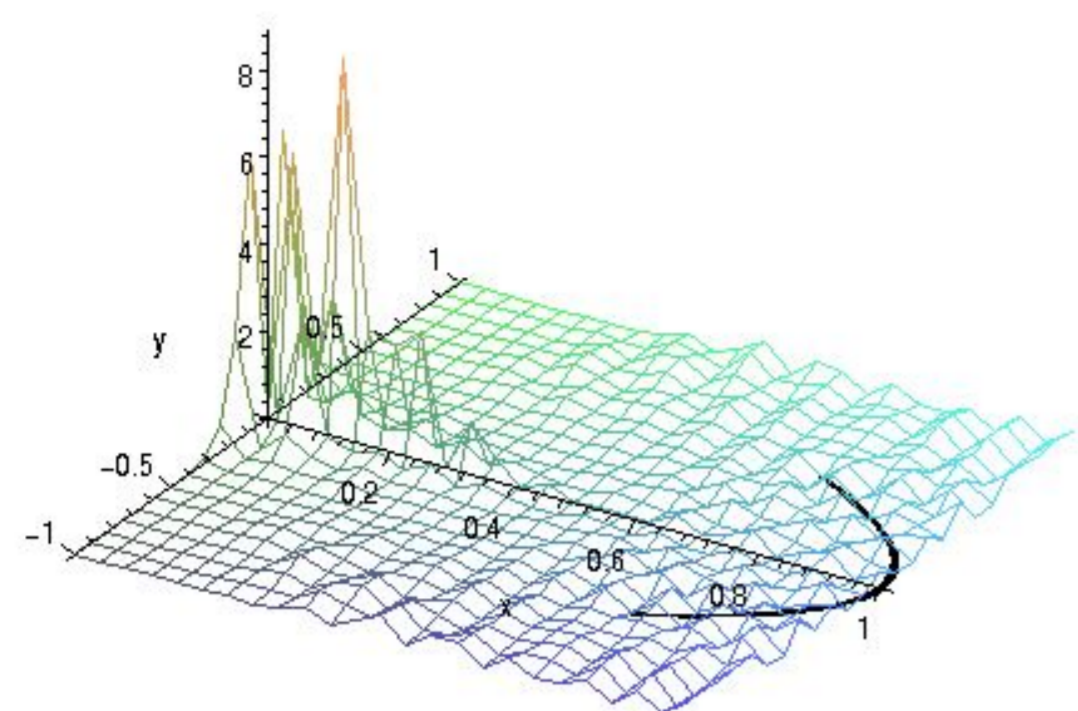
Consideremos N fuentes puntuales en el plano, en los puntos \vec{y}_j . La amplitud de la onda que producen en un punto \vec{x} del plano está dada por una suma del tipo:

$$I(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \cos(k|\vec{x} - \vec{y}_j|)$$

Dependiendo de las distancias de \vec{x} a los puntos \vec{y}_j habrá cancelaciones en esta suma.

Fuentes puntuales sobre una parábola

40 fuentes, $\nu=4$



Distribución continua de fuentes puntuales: El tubo de neón.

Supongamos que tenemos una distribución continua de fuentes puntuales a lo largo de una curva \mathcal{C} , que emiten ondas de frecuencia k (en fase), con una amplitud $a(y)$. Entonces la suma (integral)

$$I(\vec{x}, k) = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} a(\vec{y}) ds_y,$$

calcula la amplitud de la onda en el punto \vec{x} .

Cómo reconciliar los dos modelos?

- ▶ Tenemos dos modelos: uno geométrico, el otro analítico.
- ▶ Los dos son bastante satisfactorios, aunque el modelo ondulatorio es más fundamental: Fenómenos de interferencia y difracción no se pueden explicar satisfactoriamente con "rayos".
- ▶ Cómo obtener el modelo geométrico del analítico?

El problema analítico:

Para reconciliar el modelo geométrico con el analítico, debemos demostrar que la suma (integral)

$$I(\vec{x}, k) = \int_C \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} a(\vec{y}) ds_y,$$

es máxima o muy grande cuando \vec{x} está en la cáustica.

2. El Método de la Fase Estacionaria

La suma anterior es del tipo

$$I(k) = \int_M e^{ikf(y)} a(y) dm_y,$$

es una *integral oscilante*. No se puede calcular de manera exacta, pero sí se puede estimar en el régimen $k \rightarrow \infty$. Físicamente esto tiene sentido: La longitud de onda de la luz es muy pequeña.

Expansiones asintóticas:

Algunas definiciones:

▶ $I(k) = O(k^p)$ significa: $|\frac{I(k)}{k^p}|$ está acotada.

▶ $I(k) \sim \sum_j a_j k^{-j}$ significa:

$$\forall l \quad |I(k) - \sum_j^{j=l} a_j k^{-j}| = O(k^{-l-1}).$$

▶ $I(k) = O(k^{-\infty})$ significa: $\forall p < 0 \quad I(k) = O(k^p)$.

Teorema 1: Fase no estacionaria.

Si $df \neq 0$ en el soporte de a ,

$$I(k) = \int_M e^{ikf(y)} a(y) dm_y = O(k^{-\infty}).$$

El segundo teorema:

Sea $I(k) = \int_M e^{ikf(y)} a(y) dm_y$:

- ▶ Si y_0 es el único punto crítico de f y es no degenerado, entonces

$$I(k) \sim \frac{e^{ikf(y_0)}}{k^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j k^{-j}.$$

donde las constantes a_j "se pueden calcular".

- ▶ En particular $a_0 = C \cdot \frac{a(y_0)}{\sqrt{\det(f''(y_0))}}$.

-fase estacionaria-

Más sobre $I(k) = \int_M e^{ikf(y)} a(y) dm_y$:

- ▶ Si hay más de un punto crítico de f y todos son no degenerados, *cada uno de ellos* contribuye al desarrollo asintótico de $I(k)$ una serie:

$$I(k) \sim \frac{e^{ikf(y_0)}}{k^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j k^{-j}.$$

Ejemplo:

Tomemos $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera y $f = z$ como función en S^2 . Entonces f tiene dos puntos críticos (los polos). Por otra parte un cálculo directo da que:

$$\int_{S^2} e^{ikz} dA = \frac{2\pi i}{k} (e^{ik} - e^{-ik})$$

En este caso la aproximación dada por el método es exacta! (Caso particular del teorema de Duistermaat-Heckman, Atiyah-Bott.)

Regresando al problema de la cáustica:

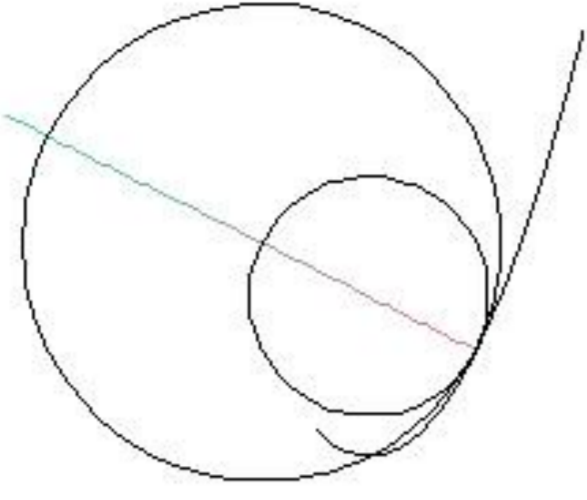
Si en $I(k) = \int_M e^{ikf(y)} a(y) dm_y$, la fase f tiene puntos críticos degenerados ($\det f''(y_0) = 0$), entonces $I(k)$ es más grande que $O(k^{-n/2})$.

Esto permite encontrar la cáustica: Si $M = \mathcal{C}$ es una curva y tomamos fuentes puntuales sobre \mathcal{C} ,

$$f(y) = |x - y|.$$

Para cualquier x esta f tiene un punto crítico: el punto en \mathcal{C} más cercano a x . *Este punto crítico es degenerado ssi x es un centro de curvatura de \mathcal{C} .*

Centro de curvatura



3. La Clásica y la Cuántica

- ▶ Lo anterior es matemática del siglo XIX.
- ▶ La expresión "límite semiclásico" se origina con la mecánica cuántica (1930).
- ▶ Ahora discutiré ejemplos en el contexto de mecánica.

Mecánica clásica

- ▶ Segunda ley de Newton: La trayectoria $\vec{x}(t)$ de una partícula sujeta a una fuerza $\vec{F} = -\nabla V$ satisface: $m\ddot{\vec{x}}(t) = -\nabla V(\vec{x}(t))$.
- ▶ Hamilton: Introduce un espacio (\vec{x}, \vec{p}) de dimensión $2n$ y en él la función energía:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{m} + V(\vec{x}).$$

La 2a ley de Newton resulta ser equivalente al sistema:

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}.$$

Espacio fase:

- ▶ El espacio de Hamilton parametriza todas las posiciones y momentos del sistema. Es un espacio geométrico M , con una estructura simpléctica: $\omega = \sum_j dx_j \wedge dp_j$.
- ▶ Dada cualquier función H en M , usando ω podemos construir un campo vectorial en M ("gradiente simpléctico").
- ▶ La dinámica generada por ese campo vectorial da las trayectorias del sistema clásico.
- ▶ *La mecánica clásica es parte de la geometría*

Ejemplos 1.

El oscilador armónico: $H(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$.

Las ecuaciones de Hamilton son: $\dot{x} = p, \dot{p} = -x$.

Si introducimos la variable compleja: $z = x + ip$, las soluciones se escriben:

$$z(t) = z(0) e^{-it}.$$

El flujo es periódico de período 2π . Este sistema es una aproximación de las oscilaciones de pequeña amplitud, de un péndulo, por ejemplo.

Ejemplos 2.

Partícula restringida a una superficie:

- ▶ En una superficie, las curvas que (localmente) minimizan su longitud entre dos puntos son las geodésicas. Por ejemplo, en la esfera las geodésicas son los círculos máximos.
- ▶ El *flujo geodésico* de una superficie M es un flujo en el espacio

$$T^*M \cong \{ (x, v) ; x \in M, v \in T_x M \}.$$

- ▶ Este es un flujo Hamiltoniano con

$$H(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2.$$

La Cuántica:

En la cuántica las partículas son *ondas* (de Broglie) –aunque no ondas de materia...

1. En vez de un espacio fase se tiene un espacio vectorial (de Hilbert), \mathcal{H} .
2. En vez de trayectorias se tienen curvas (grupos monoparamétricos) en el espacio de Hilbert.
3. En vez de las ecuaciones de Hamilton se tiene la ecuación de Schrödinger:

$$\hbar i \frac{\partial}{\partial t}(\psi) = \mathcal{S}(\psi), \quad \mathcal{S} : \mathcal{H} \cdots \rightarrow \mathcal{H}.$$

-la cuántica-

- ▶ El operador de Schrödinger de una partícula en \mathbb{R}^n sujeta a un potencial V es:

$$\mathcal{S} = -\hbar^2 \Delta + V, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n).$$

- ▶ En lo que sigue supondremos que \mathcal{S} tiene espectro puntual: $\exists\{\psi_j\}$, base ortonormal de \mathcal{H} , tal que

$$\mathcal{S}\psi_j = E_j \psi_j$$

-la cuántica-

- ▶ Las soluciones de la ecuación de Schrödinger son de la forma:

$$\sum_j e^{-i\hbar^{-1}tE_j} a_j \psi_j$$

- ▶ Si el sistema está en el estado correspondiente a $\psi \in \mathcal{H}$ y observamos su energía, el resultado será igual a E_j con probabilidad

$$\frac{|\langle \psi, \psi_j \rangle|^2}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Ejemplos:

1.- El oscilador armónico cuántico tiene por hamiltoniano el operador

$$\mathcal{S} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2.$$

El espectro es: $E_j = \hbar(j + \frac{1}{2})$; $\psi_j(x) = p_j(x)e^{-x^2/2\hbar}$.

2.- Una partícula libre en S^2 : $\mathcal{S} = -\hbar^2 \Delta_{S^2}$. El espectro consiste de los números

$$\lambda_k = \hbar^2 k(k+1) \quad \text{con multiplicidad} \quad 2k+1.$$

Los autovectores correspondientes a λ_k son los esféricos armónicos de grado k .

En general, un modelo cuántico de una partícula libre en una superficie M es: $\mathcal{H} = L^2(M)$ y $\mathcal{S} = \hbar^2 \Delta_M$ (donde Δ_M es el operador de Laplace-Beltrami).

Si M es compacta, \mathcal{S} tiene espectro discreto.

Problema: Cómo reconciliar los modelos clásico y cuántico?

En particular: El flujo geodésico de una variedad y la descripción cuántica dada por el espectro del laplaciano y sus funciones propias – qué relación tienen?

4. Algunos resultados.

En lo que sigue:

1. Tomemos un operador de Schrödinger, \mathcal{S}_{\hbar} , que supondremos tiene espectro discreto,

$$E_1(\hbar) \leq E_2(\hbar) \leq \dots, \quad \mathcal{S}\psi_j = E_j\psi_j.$$

2. Denotaremos por X y $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ el espacio fase y el Hamiltoniano del modelo clásico asociado.

3. Fijaremos un número $E \in \mathbb{R}$, valor regular de H :

$$H(w) = E \Rightarrow dH_w \neq 0.$$

La fórmula de traza:

Referencia:

Trace Formulae. En *First Summer school in analysis and mathematical physics, Cuernavaca, Mexico*. Contemporary Mathematics Series No. **260**, AMS (2000).

Resumen:

La distribución de los niveles de energía $\{E_j\}$ en una vecindad de E está dada, asintóticamente cuando $\hbar \rightarrow 0$, por la geometría de las órbitas periódicas del flujo Hamiltoniano de H en la superficie de energía $\{H = E\}$.

Teorema 1: Contando niveles de energía:

Supongamos que la medida de los puntos periódicos en $\Sigma_E := \{H = E\}$ es cero. Entonces, para toda $c > 0$

$$\#\{j ; |E - E_j| < c\hbar\} \sim 2c \text{Vol}(\Sigma_E) \hbar^{-n-1}.$$

Teorema 0:

Bajo cierta condición genérica y común de las órbitas periódicas del flujo en Σ_E , para cada función prueba ϕ con $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, las sumas

$$\sum_j \phi(\hbar^{-1}[E - E_j])$$

tienen una expansión asintótica cuando $\hbar \rightarrow 0$ cuyos términos están dados por las órbitas periódicas.

Caos cuántico

Es el estudio de sistemas cuánticos cuya contrapartida clásica es un sistema dinámico caótico.

Teorema(Zelditch, Colin de Verdière) Si el sistema clásico en Σ_E es ergódico, casi todas las autofunciones

$$\psi_j \quad \text{tales que } |E_j - E| < c\hbar$$

se distribuyen uniformemente en Σ_E cuando $\hbar \rightarrow 0$.

5. Algunos problemas abiertos:

- ▶ Remover el “casi todas” en la conclusión del teorema anterior (Sarnak).
- ▶ Los físicos (M. Berry) han hecho muchas conjeturas que consideran al espectro en intervalos $[E - c\hbar^p, E + c\hbar^p]$ con $p > 1$. Esta escala es demasiado fina para estudiarla con la fase estacionaria. Encontrar métodos para analizar el espectro a estas escalas...

Otras Direcciones:

Sea X una variedad simpléctica. Podemos considerar a X como el espacio fase de algún sistema dinámico.

- ▶ Se puede “cuantizar” X ? –Asociarle espacios de Hilbert \mathcal{H}_\hbar , y a funciones en X operadores en \mathcal{H}_\hbar . Se sabe que sí si X es Kähler. Si X es entera hay resultados parciales (Borthwick, U.), pero la teoría no está bien estudiada.
- ▶ Sin embargo nos permitió demostrar un teorema de encaje de variedades casi-Kähler en espacios proyectivos complejos.

- ▶ Donaldson y D. Auroux han utilizado la idea de "cuantización" (en un sentido más débil y más fuerte a la vez) para estudiar la geometría de X . Qué tan lejos se puede llegar en esta dirección?